ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 17 AOUT 1925.

PRÉSIDENCE DE M. GUILLAUME BIGOURDAN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

SPECTROSCOPIE. — *Recherches complémentaires sur la structure et la distribution des spectres de bandes.* Note de M. H. **Deslandres**.

J'ai consacré deux Notes antérieures aux bandes d'absorption infra-rouges de plusieurs gaz de composition chimique simple ; ces bandes, exprimées en fréquences, sont sous la dépendance d'une fréquence universelle 1062,5, désignée par la lettre d_1, et d'après la formule $\nu = qd_1/rs$; q, r, s étant des nombres entiers et s étant égal au nombre des atomes de la molécule. Les gaz étudiés, O^2, CO, NCH, NH^3, H^2O, CH^4, au nombre de six, sont formés d'atomes légers, classés dans la première période de la série de Mendéléef (¹).

La recherche a été poussée loin avec la vapeur d'eau, dont le spectre a été relevé avec un soin tout particulier et jusqu'à l'extrême infra-rouge (340^μ). On a pu vérifier la relation précédente pour les 34 bandes de la vapeur et même l'étendre aux petits maxima secondaires de plusieurs bandes.

Avec les cinq autres gaz, les données de l'observation sont beaucoup moins nombreuses et étendues. Cependant, je présente ci-après un tableau nouveau des bandes de l'ammoniac, plus complet que le précédent, et tout semblable à celui publié en juin dernier pour la vapeur d'eau. Les

(¹) Voir *Comptes rendus*, 180, 1925, p. 1454 et 1980, et aussi Schierkolk, *Zeits. f. Phys.*, 31, 1925, p. 273.

bandes y sont rangées dans l'ordre des longueurs d'onde, et avec l'indication de la longueur du gaz traversé à la pression atmosphérique. On saisit au premier coup d'œil que, dans l'ensemble, l'absorption croît avec la longueur d'onde; dans la région de 5^{μ} à 14^{μ}, les bandes sont plus fortes que de 1^{μ} à 5^{μ}, alors que l'épaisseur du gaz est six fois moindre. Le même caractère se retrouve, comme on sait, avec la vapeur d'eau. Les longueurs d'onde inscrites, qui sont celles de Schierko k, s'arrêtent à $14^{\mu},5$, soit à la limite de transparence du sel gemme; on a ajouté seulement une bande d'absorption à 52^{μ} reconnue par Rubens avec les rayons restants. Il sera très utile de poursuivre l'étude de l'absorption dans l'infrarouge extrême, aussi loin et aussi complètement qu'on l'a fait pour la vapeur d'eau.

Bandes d'absorption du gaz ammoniac comparées aux multiples de $d_1/4r$; $d_1 = 1062,5$.

	Intensité de 1 à 10.	Longueurs d'onde en μ.	Nombre de vibrations.	$d_1/4$ ou 265,6.	$d_1/8$ ou 132,8.	$d_1/12$ ou 88,54.	$d_1/16$ ou 66,4.
	0,5	μ 1,20	8333	″	″	″	**133** — 2
	0,5	1,298	7704	**29** + 2	″	″	″
	4	1,493	6698	″	″	″	**101** — 2
31^cm	1	1,643	6086	**23** — 23	″	″	″
de	5	1,935	5168	**19** — 21	″	″	″
gaz.	8	2,22 do	4505	**17** — 11	″	″	″
	8	2,938 do	3404	**13** — 49	″	″	″
	7	3,076	3251	″	″	″	**49** — 3
	1	3,896	″	″	″	**29** + 0	″
	0,6	5,167	″	″	″	″	**29** + 10
	9	5,709 do	1752	″	**13** + 25	″	**26**
5^cm,5	9	6,32 do	1582	**6** — 12	**12**	**18**	**24**
de	9	9,345 do	1070	**4** — 7,5	**8**	**12**	**16**
gaz.	9,5	10,492 do	953	″	**7** + 23	″	**14**
	8,5	11,825	846	″	″	″	**13** — 17
	4	13,13 do	797	**3** — 26	**6**	**9**	**12**
	»	52?	192,3	″	″	″	**3** — 7

Nota. — Dans les colonnes à partir de la quatrième, le gros chiffre représente le multiple de $d_1/4r$ et le petit chiffre à côté l'écart avec la fréquence observée.

On a ajouté un point d'interrogation pour la bande 52^{μ} parce que cette longueur d'onde ne correspond pas sûrement à la partie la plus absorbée de la bande.

Ces tableaux donnent seulement les bandes principales, c'est-à-dire la longueur d'onde qui, dans la bande, subit l'absorption maxima, ou, si la

bande est double (do sur le tableau), la longueur d'onde de la partie centrale relativement brillante entre deux maxima d'absorption ([1]). Or, lorsque la dispersion est suffisante, la bande, simple ou double, offre souvent sur les côtés de petits maxima secondaires, dont l'étude s'annonce comme fort intéressante. Ainsi, avec les bandes $6^{\mu},26$ et $3^{\mu},154$ de la vapeur d'eau, les maxima secondaires sont nombreux et à peu près équidistants; et, fait curieux, leur intervalle moyen, exprimé en fréquences, est aussi un sous-multiple de la fréquence universelle d_1, comme il est indiqué ci-dessous d'après la Note précédente.

H^2O :	$6^{\mu},26$	46 maxima secondaires	Intervalle moyen........	$d_1/8 \times 6$
	$3^{\mu},154$	12 »	»	$d_1 8 \times 3$

J'ai recherché si la même propriété se retrouve dans les bandes de l'ammoniac, et aussi dans d'autres bandes infrarouges. Avec l'ammoniac, les conditions ne sont pas favorables; car le spectre a été étudié seulement avec des prismes qui n'assurent pas une grande dispersion. Les seules bandes utilisables sont les bandes $13^{\mu},13$ et $11^{\mu},82$, qui offrent des maxima bien nets, mais peu nombreux, la première de $13^{\mu},70$ à $12^{\mu},63$, et la seconde de $12^{\mu},49$ à $11^{\mu},153$. On peut ajouter la bande $9^{\mu},345$, qui, de $8^{\mu},002$ à $8^{\mu},339$, et donc d'un seul côté, a des maxima secondaires relevés avec netteté, sans que l'on puisse vérifier l'équidistance des maxima sur l'ensemble de la bande. Finalement on a :

NH^3 :	$13^{\mu}, 13$,	6 intervalles,	moyenne.............	$d_1/7 \times 14,25$
	$11^{\mu},820$,	5 »	»	$d_1/7 \times 8$
	$9^{\mu},345$,	3 »	»	$d_1/7 \times 9$

Ces nombres sont provisoires, le nombre des intervalles étant trop petit; mais ils mettent en relief le facteur 7 dans le dénominateur de l'expression qui représente l'intervalle moyen. De même, avec la vapeur d'eau, le facteur 8 se détache; or 7 et 8 sont les nombres atomiques de l'azote et de l'oxygène qui, dans les composés NH^3 et H^2O, sont les corps simples les plus lourds.

J'ai été conduit à examiner au même point de vue les bandes d'absorption bien connues de l'acide fluorhydrique HF, de l'acide chlorhydrique HCl,

---

([1]) Les bandes de ce tableau, marquées doubles, ne sont pas aussi nettement doubles que la bande $6^{\mu},26$ de H^2O ou $3^{\mu},46$ de HCl, la dispersion de l'appareil spectrale étant notablement moindre avec NH^3. L'étude de l'absorption avec un appareil plus puissant pourra entraîner de petites rectifications.

et de l'acide bromhydrique HBr, qui ont été relevés avec la grande dispersion d'un réseau. Les bandes de ces composés, reconnues de $0^{\mu},8$ à $14^{\mu},5$, sont peu nombreuses; mais les plus fortes ont été divisées en maxima secondaires bien distincts. Ainsi la bande λ $3^{\mu},46$ de HCl offre 24 maxima nets d'absorption, avec, au centre, un maximum brillant renversé, deux fois plus large. C'est le type de la bande double.

Les trois composés ont une structure chimique au moins aussi simple que les six composés précédents, mais ils comprennent des atomes plus lourds, les atomes de chlore et de brome, classés dans les deuxième et quatrième périodes de Mendéléef (¹), dont les nombres atomiques sont 17 et 35, et les poids atomiques 35 et 80.

J'ai cherché d'abord si ces bandes, représentées par le maximum brillant du centre, sont reliées aussi simplement que les précédentes à la constante universelle 1062,5. Le résultat est le suivant :

Longueur d'onde en μ.	Nombre de vibrations.	Comparaison avec d_1 ou 1062,5.		Noms des observateurs (²).
	Acide fluorhydrique HF.			
$2^{\mu},52$ do.......	3962	$= 15d_1/4$	+ 22	Imes, 1919
	Acide chlorhydrique HCl.			
$3^{\mu},464$ do......	2887	$= 8d_1/3$	+ 54	Imes
$1^{\mu},764$ do......	5659	$= 16d_1/3$	+ 2	Imes
$1^{\mu},192$........	8389	$= 24d_1/3$	− 110	Schefer et Thomas, 1923
		$= 71d_1/9$	+ 7	
	Acide bromhydrique HBr.			
$3^{\mu},908$ do......	2559	$= 12d_1/5$	+ 9	Imes
$1^{\mu},98$.........	5051	$= 24d_1/5$	+ 49	Schefer et Thomas

L'acide fluorhydrique a une seule bande, conforme à la loi précédente ; il serait utile de prolonger la recherche au delà de $14^{\mu},5$, dans la région de $d_1/2$ et $d_1/4$.

(¹) J'admets ici des périodes de 8 éléments ainsi que dans les premiers tableaux de Mendéléef. Plus tard, les troisième et quatrième périodes anciennes ont été rattachées à une période nouvelle de 18 éléments ; mais on est obligé de diviser cette période en deux sous-périodes.

(²) Imes, *Astrophys. Journal*, 50, 1919, p. 251 — Shefer et Thomas, *Zeits. f. Phys.*, 12, 1923, p. 330.

D'autre part les acides chlorhydrique et bromhydrique, qui devraient dépendre de $d_1/2r$, sont rattachés à $d_1/3$ et $d_1/5$. La loi tient encore si on la généralise, si on admet que chaque atome est représenté non par une unité, mais par le nombre de ses grands anneaux d'électrons; le chlore est alors représenté par 2, le brome par 4, et le fluor par 1. Cette règle qui est simple exigera, pour être acceptée, des vérifications plus nombreuses.

J'ai examiné ensuite les intervalles des maxima secondaires dans les bandes du tableau précédent. Les intervalles ne sont pas constants, comme avec la vapeur d'eau; ils forment, à de faibles différences près, une progression arithmétique (¹). On considère alors seulement l'intervalle moyen qui est justement égal à la moitié de la largeur du maximum central, et j'ai formé avec les largeurs mesurées par Imes le tableau suivant :

HF :	$2^\mu,52$,	moitié de l'intervalle central.......	$d_1/9 \times 2,93$
HCl :	$3^\mu,464$,	»	$d_1/17 \times 3$
»	$1^\mu,764$,	»	$d_1/17 \times 2,97$
HBr :	$3^\mu,908$,	»	$d_1/35 \times 1,80$

Avec le fluor et le chlore, les intervalles sont en raison inverse des nombres atomiques 9 et 17; ces nombres se retrouvent au dénominateur comme avec l'oxygène et l'azote. Le brome, il est vrai, fait exception : il diffère des corps simples précédents par le rapport du poids atomique P et du nombre atomique A, rapport qui est supérieur à 2. Si l'on multiplie $d_1/35 \times 2$ par P/2A, on retrouve à peu près l'intervalle mesuré.

Cette influence de l'atome le plus lourd et de son nombre atomique sur les petits maxima doit retenir l'attention ; elle paraît nette avec trois ou même quatre corps composés dont les atomes ont un poids inférieur à 40; pour conclure, il faut attendre des vérifications nouvelles.

Cependant, de ces premiers résultats encore incomplets, on peut tirer déjà des idées et suggestions nouvelles sur l'atome et la molécule. Pour expliquer la constante universelle d_1, pour expliquer aussi la fréquence des

(¹) Les petites bandes secondaires sont représentées par la formule

$$\nu = \nu_0 - (c \times p^2 + c_1 p),$$

p étant un nombre entier, c_1 l'intervalle moyen et ν_0 la fréquence du milieu du maximum central renversé. C'est un cas particulier de la formule générale que j'ai posée en 1887 et 1919 pour la distribution des bandes d'un même composé et qui est à deux paramètres avec deux termes, l'un positif, l'autre négatif. Ici on a un seul paramètre, le paramètre du terme négatif, exactement comme avec les bandes lumineuses d'absorption A, B, α, α', α'' du spectre solaire, examinées en 1919.

bandes qui paraît dépendre du nombre des atomes dans la molécule, j'ai admis provisoirement une sorte de cuirasse qui est fixée à l'atome, qui est la même pour plusieurs atomes et qui, de plus, a ses vibrations propres. Les atomes cuirassés se groupent comme les briques d'un mur ou forment des lignes fermées polygonales, et l'on explique ainsi fort bien plusieurs particularités des spectres de bandes ([1]). Si la position de la bande dépend aussi du nombre des anneaux d'électrons, la cuirasse admise, qui, pour simplifier, a été supposée d'abord être un cube, doit être allongée dans le sens des anneaux d'électrons. De plus, les atomes de la molécule, au moins dans les corps à structure simple de cette note, doivent être rapprochés dans le plan équatorial de l'atome le plus lourd, plutôt que dans le plan perpendiculaire ; et la partie centrale de la bande serait due aux vibrations qui s'établissent entre les atomes dans le plan équatorial. Enfin les petits maxima secondaires de la bande, attribués en général à la rotation de la molécule, doivent avoir une autre origine ; l'hypothèse de la rotation, acceptable à la rigueur avec une molécule diatomique, ne convient plus aussi bien avec la vapeur d'eau et le gaz ammoniac, et elle ne s'applique pas à l'atome isolé, qui, lui aussi, peut émettre un spectre de bandes ([2]).

Cette première dissection de 9 spectres infrarouges, la plupart incom-

---

([1]) Lorsque la température s'abaisse progressivement dans un récipient fermé qui contient un gaz, les molécules se réunissent, et le nombre des molécules dans un même groupement va en croissant. A un certain moment, la pesanteur l'emporte sur les chocs ; les agrégats de molécules tombent et se réunissent dans la partie basse du récipient, sans se souder d'abord les uns aux autres. Ils forment alors un liquide dont le poids est, à une température donnée, dans un rapport constant avec le poids du gaz restant. On a ainsi une théorie simple des liquides, que les études d'absorption infra-rouge permettront peut-être de vérifier.

([2]) Dans HCl, les atomes H et Cl qui ont des charges électriques contraires, doivent décrire des ellipses conjuguées; cependant, pour expliquer le spectre de bandes, on les suppose rigidement liés, et en rotation autour d'un axe perpendiculaire à la droite qui les joint. Pourquoi ce mouvement plutôt que l'autre?

La variation simultanée des distances mutuelles de tous les atomes dans la molécule et de tous les électrons dans un atome, peut expliquer dans ces spectres, d'une part, l'influence du nombre des atomes ou des grands anneaux d'électrons, et, d'autre part l'influence du nombre atomique. On est conduit naturellement à la formule suivante qui résume tous les faits actuels : $\nu \mp q d_1/s \times r \pm q' d_1/s' \times r'$; s étant le nombre des atomes ou des grands anneaux d'électrons dans la molécule, et s' le nombre des électrons d'un atome; q, r, q' et r' étant des nombres entiers quelconques. Les preuves et vérifications à l'appui ne sont pas encore assez nombreuses.

plets, a donc été fructueuse. Il faut poursuivre la recherche avec une précision plus grande des mesures sur l'échelle entière de ces vibrations, c'est-à-dire jusqu'à 3000^{μ}, et l'étendre à tous les corps. Dans son traité récent de spectroscopie, Baly émet l'idée que la région infrarouge est pleine de promesses, et qu'elle donnera la clef des grands problèmes qui se posent dans l'émission et l'absorption de l'énergie rayonnante par la matière. Je partage cette opinion; jusqu'à présent, on a étudié surtout les phénomènes dans la région qui s'étend des rayons lumineux aux rayons X, en soumettant les corps à des températures très élevées, à des étincelles très puissantes, à des chocs très violents de particules. Pour bien reconnaître les propriétés intimes de la matière, il sera peut-être meilleur d'étudier simplement son absorption infrarouge, à des températures beaucoup plus basses, avec la contrainte minima imposée aux corps (1).

CORRESPONDANCE.

M. E. **Hegh** adresse des remercîments pour la distinction que l'Académie a accordée à ses travaux.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

La fabrication des ferro-alliages, par Aimé Contagne. (Présenté par M. L. Guillet.)

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Nouvelles propriétés des courbes de courbure normale constante; leur rôle dans la représentation des surfaces sur les surfaces parallèles. Applications.* Note (2) de Mlle **Sylvie Creangă**, présentée par M. Appell.

1° Le carré de la torsion géodésique d'une courbe de courbure normale constante $\frac{1}{R}$

$$\frac{1}{R} = -\frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + 6\,dv^2},$$

(1) Cette remarque paraît juste surtout pour les corps composés.

(2) Séance du 27 juillet 1925.

a l'expression $\frac{1}{T_g^2} = -K + \frac{H}{R} - \frac{1}{R^2}$ (K, courbure totale ; H, courbure moyenne de la surface). Si l'on nomme *torsion sphérique* R d'une courbe $\frac{1}{S_R}$, le rapport de l'angle de deux sphères de rayons R, de contact maximum avec la courbe, infiniment voisines, à l'arc correspondant, on a pour les courbes de courbure normale constante $\frac{1}{R}$:

$$\frac{1}{S_R^2} = -K + \frac{H}{R}.$$

C'est la torsion sphérique ([1]) de la géodésique qui a même tangente que la courbe qu'on pourrait nommer *torsion sphérique géodésique*.

Pour $R = \infty$ on déduit $\frac{1}{T^2} = -K$, ainsi que ces deux théorèmes peuvent être considérés comme des généralisations du théorème d'Enneper pour les lignes asymptotiques.

2° Les lignes de courbure normale constante $\frac{1}{R}$ jouent dans la représentation d'une surface sur la surface parallèle à la distance R, où des points sur la même normale se correspondent, le même rôle que les lignes asymptotiques dans la représentation sphérique de Gauss, qui peut être considérée comme cas limite de cette représentation plus générale.

On trouve des relations entre $D D' D''$ et les symboles de Christoffel sur les deux surfaces qui généralisent les relations de Weingarten pour la représentation sphérique de forme

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(D + \frac{E}{R}\right) = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}_S \left(D + \frac{E}{R}\right) + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}_S \left(D' + \frac{E}{R}\right) + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}_{S_1} \left(D + \frac{E}{R}\right) + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}_{S_1} \left(D' + \frac{E}{R}\right)$$

qui, si l'on prend les lignes de courbure normale constante $\frac{1}{R}$ comme paramétriques, devient

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}_S = -\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}_{S_1}.$$

Cette représentation a les propriétés suivantes : 1° Les directions cyclifiablement conjuguées ([2]) $\frac{1}{R}$ se transforment en directions cyclifiablement

---

([1]) SCHELL, *Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung*, p. 58.
([2]) *Comptes rendus*, 179, 1919, p. 587.

conjuguées $-\frac{1}{R}$; 2° leur angle se conserve; 3° les lignes de courbure normale constante $\frac{1}{R}$ correspondent aux lignes de courbure normale constante $-\frac{1}{R}$; 4° elles forment ce qu'on nomme une paire orthogonale de courbes; 5° le rapport des carrés des torsions sphériques R des courbes de courbure normale constante correspondantes est égal au rapport des courbures totales des deux surfaces, au rapport des courbures moyennes, changé de signe, au rapport du carré de la torsion géodésique à la courbure normale.

3° Ces lignes et cette représentation mettent en évidence deux catégories de surfaces importantes : les surfaces de courbure moyenne constante $H=\frac{2}{R}$ et les surfaces caractérisées par $-K+\frac{H}{R}-\frac{1}{R^2}=$ const.

Les surfaces caractérisées par $H=\frac{2}{R}$ sont représentées conformément sur leur surface parallèle à la distance R; ce sont les seules surfaces pour lesquelles les lignes de courbure normale constante $\frac{1}{R}$ sont orthogonales et isométriques.

Les surfaces caractérisées par $-K+\frac{H}{R}-\frac{1}{R^2}=$ const. ont la torsion sphérique R et la torsion géodésique des courbes de courbure normale constante, constantes; ce sont les seules surfaces pour lesquelles les courbes de courbure normale constante forment un réseau de Tchebychef, et pour lesquelles les lignes asymptotiques des deux nappes de la surface évolute qui se correspondent, les surfaces étant des surfaces de Weingarten, correspondent à leurs lignes de courbure normale constante.

Pour $R=\infty$, ce sont les propriétés connues des lignes asymptotiques ([2]) respectivement sur les surfaces minimales, sur les surfaces à courbure totale constante, auxquelles les surfaces signalées se réduisent en même temps que leurs lignes de courbure normale constante $\frac{1}{R}$ aux lignes asymptotiques.

([1]) L. Bianchi, *Vorlesungen über diff. Geom.*, sweite Auflage, p. 128, 129, 248, 249.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur les semi-invariants de Thiele.* Note [1] de M. **Ragnar Frisch**, présentée par M. Hadamard.

Depuis quelques années, les semi-invariants introduits dans le calcul des probabilités par Thiele [2] commencent à jouer un rôle des plus importants comme moyen de caractériser la distribution des probabilités.

Si l'on considère la distribution d'une variable fortuite pouvant assumer la valeur x_ν avec la probabilité P_{x_ν} ($\nu = 0, 1, \ldots, s$), les semi-invariants λ_n ($n = 0, 1, \ldots, \infty$) sont définis par l'identité en t

$$(1) \qquad e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n t^n}{n!}} = \sum_{\nu=0}^{s} P_{x_\nu} . e^{x_\nu t}.$$

Pour les déterminer, on cherche une expression de la fonction

$$(2) \qquad u = u(t) = \operatorname{Log} \sum_{\nu=0}^{s} P_{x_\nu} . e^{x_\nu t}$$

et de ses dérivées successives. On a alors

$$\lambda_n = u^{(n)}(0).$$

Dans le cas spécial de la distribution binominale discontinue, on a

$$x_\nu = \nu, \qquad P_{x_\nu} = P_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}, \qquad u = s \operatorname{Log}(q + pe^t), \qquad q = 1 - p,$$

p étant la probabilité d'un certain événement, et P_ν étant la probabilité pour qu'il se produise ν fois en s épreuves. Je vais démontrer que l'on a dans ce cas

$$(3) \qquad \lambda_n = pq \frac{d}{dp} \lambda_{n-1} \qquad (1 < n),$$

$$(4) \qquad \lambda_{2g} = s \sum_{k=1}^{g} A_{gk} (pq)^k, \qquad \lambda_{2g+1} = s(q-p) \sum_{k=1}^{g} B_{gk} (pq)^k \qquad (0 < g),$$

---

[1] Séance du 15 juillet 1925.

[2] Thiele, *Almindelig Iagttagelseslaere*, Kbhvn, 1884; *Theory of Observations.* London, 1903. Voir aussi Hausdorff, *Berichte der kgl. sächsischen Ges. d. Wissensch.*, Leipzig, *Mathem.-Phys. Cl.*, 1901, 53, p. 171. Les *kanonische Parameter* de Hausdorff se confondent avec les semi-invariants de Thiele.

A_{gk} et B_{gk} étant des coefficients numériques donnés par les formules

(5) $$kA_{gk} = B_{gk} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{2k}{k+j} j^{2g}.$$

Posons pour abréger

$$v = e^t \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u^{(n)} = \frac{\partial^n u}{\partial t^n}, \qquad v^{(n)} = \frac{\partial^n v}{\partial t^n}.$$

L'identité

(6) $$q u^{(n)} = spe^t - p v^{(n-1)}$$

est vérifiée pour $n = 1$ puisque

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{spe^t}{q + pe^t}.$$

Étant dérivée par rapport à t elle ne subit d'autre modification que celle qui consiste à remplacer n par $(n+1)$. Donc elle est générale.

Remarquant que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v + pq \frac{\partial v}{\partial p}$$

nous pouvons transformer le second membre de (6) en $q\left[u^{(n-1)} - p^2 \frac{\partial}{\partial p} v^{(n-2)}\right]$. Cette expression est égale à $q(pq)\frac{\partial}{\partial p} u^{(n-1)}$, ce que l'on vérifie en dérivant (6) par rapport à p. Donc

$$u^{(n)} = pq \frac{\partial}{\partial p} u^{(n-1)}.$$

Nous n'avons qu'à faire $t = 0$ dans cette dernière relation pour avoir la formule (3).

A l'aide de (3), on démontre que des développements tels que (4) doivent exister, et l'on obtient les relations récurrentes

$$B_{gk} = kA_{gk}, \qquad A_{gk} = k^2 A_{g-1,k} - (2k-2)(2k-1) A_{g-1,k-1}$$

avec les conditions initiales

$$A_{g1} = 1, \qquad A_{gg} = (-1)^{g-1}(2g-1)!$$

ce qui montre que l'on a

$$A_{gk} = (-1)^{k-1}(2k-1)!\,\Gamma^2_{g-k,k},$$

où $\Gamma^2_{\nu k}$ est la somme des produits à ν facteurs que l'on obtient par une combinaison d'ordre ν avec répétition, les éléments combinés étant les carrés des nombres naturels $1^2, 2^2, \ldots, k^2$. En effet on vérifie aisément que les

nombres $(-1)^{k-1}(2k-1)\Gamma^{(2)}_{g-k,k}$ satisfont à la même relation récurrente et aux mêmes conditions initiales que les nombres A_{gk}.

Considérons la fonction

$$f_k(x) = [(1-1^2x)(1-2^2x)\ldots(1-k^2x)]^{-1}.$$

C'est une fonction génératrice pour les nombres Γ. En effet pour $|k^2x| < 1$ on peut développer $f_k(x)$ en série de puissances. Le coefficient de x^ν dans ce développement sera égal à $\Gamma^{(2)}_{\nu k}$, ce que l'on vérifie en portant le développement de $f_k(x)$ dans l'équation

$$(1-k^2x)\,f_k(x) = f_{k-1}(x).$$

La décomposition de $f_k(x)$ en fractions simples donne

$$(7)\qquad f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k(2k-1)!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{2k}{k+j}\frac{j^{2k}}{(1-j^2x)}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(2k-1)!}x^\nu\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{2k}{k+j}j^{2(k+\nu)},$$

d'où l'expression des nombres Γ et la formule (5).

Il est intéressant de noter l'analogie qui existe entre les nombres $\Gamma^{(2)}_{\nu k}$, les nombres de Bernoulli généralisés d'ordre négatif $B^{(-k)}_\nu$ et les différences de zéro $\Delta^k O^g$. Si l'on pose

$$\Gamma^{(1)}_{\nu k} = \frac{\Delta^k O^{\nu+k}}{k!} = \binom{\nu+k}{k}B^{(-k)}_\nu,$$

$\Gamma^{(1)}_{\nu k}$ est la somme des produits à ν facteurs que l'on obtient par une combinaison d'ordre ν avec répétition, les éléments combinés étant les nombres naturels 1, 2, ..., k. La généralisation de ces nombres au cas où les éléments combinés sont les nombres naturels élevés à une puissance quelconque, est immédiate.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la non-uniformisabilité par les fonctions méromorphes des variétés algébriques les plus générales.* Note [1] de M. **André Bloch**, transmise par M. Hadamard.

Après avoir obtenu précédemment différentes propriétés des systèmes de p fonctions uniformes d'une variable, liées par une relation algébrique,

[1] Séance du 15 juillet 1925.

je me suis proposé une étude analogue sur les systèmes de p fonctions de p variables, liées par une telle relation. Étendons d'abord à plusieurs variables la méthode employée dans mes précédentes recherches, celle qui a été créée par MM. F. et R. Nevanlinna pour les fonctions d'une variable (¹). Soit $\varphi(x, y)$ une fonction holomorphe ou méromorphe dans le système de cercles $|x| \leqq r_1$, $|y| \leqq r_2$, et posons

$$m(r_1, r_2; \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |\varphi(r_1 e^{i\psi_1}, r_2 e^{i\psi_2})| \, d\psi_1 \, d\psi_2.$$

Pour une fonction holomorphe $f(x, y)$, égale à 1 à l'origine, posons

$$\mathrm{N}(r_1, r_2; f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r_1 e^{i\psi_1}, r_2 e^{i\psi_2})| \, d\psi_1 \, d\psi_2.$$

$\mathrm{N}(r_1, r_2; f)$ ne dépend que de la courbe des zéros de f et est une fonction croissante de r_1 et r_2. Pour une fonction méromorphe $g(x, y)$ non nulle à l'origine, que l'on peut supposer mise sous la forme $\frac{h}{k}$, où h et k sont holomorphes et h égale à 1 à l'origine, posons

$$\mathrm{N}(r_1, r_2; g) = \mathrm{N}(r_1, r_2; h).$$

Pour une fonction méromorphe $\varphi(x, y)$, posons

$$gm(r_1, r_2; \varphi) = m(r_1, r_2; \varphi) + \mathrm{N}\left(r_1, r_2; \frac{1}{\varphi}\right).$$

L'expression $gm(r_1, r_2; \varphi)$ est une fonction croissante de r_1 et r_2. On a

$$\varphi(0, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(r_1 e^{i\psi_1}, r_2 e^{i\psi_2})| \, d\psi_1 \, d\psi_2 + \mathrm{N}\left(r_1, r_2; \frac{1}{\varphi}\right) - \mathrm{N}(r_1, r_2; \varphi).$$

Un théorème de M. R. Nevanlinna (¹) (^{a}) s'étend de même à plusieurs variables. Et l'on déduit de là l'inégalité

$$gm(r'_1, r'_2; \varphi'_x) < \overset{+}{\log} \frac{2}{r_1 - r'_1} + 2\, gm(r_1, r_2; \varphi) \qquad (r'_1 < r_1;\ r'_2 < r_2).$$

D'où, presque partout :

$$gm(r_1, r_2; \varphi'_x) < (2 + \varepsilon)\, gm(r_1, r_2; \varphi).$$

Soit maintenant $\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0$ une surface algébrique d'ordre m, sans

---

(¹) Cf. Rolf Nevanlinna, (^{a}) *Ueber eine Klasse meromorphen Funktionen* (*Math. Ann.*, 92, 1924, p. 145); (^{b}) *Beweis des Picard-Landauschen Satzes* (*Gött. Nachr.*, 6 juin 1924, p. 151).

singularités que l'on suppose uniformisée par des fonctions méromorphes en u et v. En introduisant une variable d'homogénéité T et appliquant le théorème d'Euler, on obtient, pour tout point de la surface :

$$F'_X : F'_Y : F'_Z : F'_T :: \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} : \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} : \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} : [X, Y, Z];$$

le crochet désignant le déterminant de X, Y, Z et de leurs dérivées. Les déterminants du second membre ne sont pas identiquement nuls si X, Y, Z ne sont pas fonctions les uns des autres. D'autre part, les quatre dérivées du premier membre étant sans zéros communs, si l'on considère trois combinaisons linéaires *génériques* fixes des rapports de trois d'eutre elles à la quatrième, en reconnaît que la plus grande des trois expressions gm correspondantes surpasse constamment, à une constante additive près, le produit par $(m - 1)$ de chacune des gm de X, Y, Z. Donc, eu égard à la dernière inégalité obtenue, on a, si l'on dépasse une certaine constante numérique, une impossibilité. Ainsi :

Soit une variété algébrique à p dimensions, sans singularités, de l'espace à $p+1$ dimensions. Si son ordre m dépasse un certain nombre M_p, dépendant uniquement de p, elle n'est pas uniformisable par les fonctions méromorphes.

En utilisant directement l'avant-dernière inégalité, on trouve (¹) (⁶) :

Si $p+1$ fonctions de p variables méromorphes dans l'hypersphère-unité, sont liées par l'équation de la variété ci-dessus, le jacobien à l'origine de p d'entre elles, holomorphes dans le voisinage admet une borne supérieure dépendant uniquement du point de la variété correspondant à l'origine.

De là dérive un corollaire :

Soit, intérieur au sens strict à l'hypersphère-unité à 2p dimensions réelles, un continuum ouvert à p dimensions réelles : il lui correspond, par les fonctions méromorphes considérées, un certain continuum sur la variété. Soit une intégrale p-uple de première espèce attachée à la variété. La valeur de cette intégrale étendue au continuum de la variété admet une borne supérieure dépendant uniquement du continuum donné dans l'hypersphère-unité (et par suite uniquement de la frontière à $p-1$ dimensions dudit continuum).

Il y aurait intérêt à remplacer les hypothèses faites sur la variété — être sans singularités et d'ordre $m > M_p$ — par la suivante, plus générale et birationnellement invariante : *admettre plus d'une intégrale p-uple de première espèce.* Mais la réciproque, naturellement, n'aura pas lieu, comme le prouve l'exemple des surfaces réglées.

(¹) (⁶) *Loc. cit.*

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur le problème de M. Émile Borel et la méthode des résolvantes.* Note de M. N. **Lusin**, présentée par M. Émile Borel.

La présente Note se rattache à celles que j'ai soumises à l'Académie aux dates des 4 mai, 25 mai, 15 juin et 13 juillet derniers; sa place logique est à la suite de la troisième. Je poursuis dans la Communication actuelle la résolution du problème de M. Émile Borel (¹) dont l'énoncé a été cité dans la première de ces notes.

1. *Les résolvantes.* — Nous dirons qu'un problème quelconque P de la théorie des fonctions est *mis en résolvante* lorsque nous pouvons nommer, au sens de M. Henri Lebesgue, un ensemble *de points* E tel qu'on sait résoudre par l'affirmative le problème P toutes les fois qu'on peut nommer un point de E, et on sait le résoudre par la négative toutes les fois qu'on peut démontrer que l'ensemble E est vide. L'ensemble de points E lui-même, dont dépend la résolution finale du problème proposé P, sera dit *la résolvante* du problème P.

Parmi les problèmes de la théorie des fonctions dont la résolution paraît présenter des difficultés d'ordre transcendant, si l'on peut ainsi dire, la plupart admettent la mise en résolvante, et il importe de remarquer que ces résolvantes sont toutes des ensembles *projectifs*. Parmi ces problèmes, les plus intéressants sont ceux qui cherchent le continu bien ordonné d'une manière effective ou la notation analytique d'une manière dépourvue d'ambiguïté pour *tous* les nombres transfinis de seconde classe (Émile Borel).

Ce sont précisément les résolvantes projectives de ces problèmes que je considère comme des solutions probantes du problème précédemment cité de M. Émile Borel.

2. Dans les cadres limités de la Communication actuelle, nous ne ferons que mentionner un problème dont la réalité, le caractère peu artificiel, l'importance se montrent à ce fait qu'il ne s'agit, d'après la définition des ensembles analytiques, que des séries de polynomes à coefficients entiers qui convergent absolument pour toutes valeurs de x, $0 < x < 1$:

Reconnaître si tous les complémentaires des ensembles analytiques n'ont pas,

---

(¹) Voir la Communication de M. Émile Borel faite au IVᵉ Congrès international des Mathématiciens (Rome, avril 1908).

ou bien la puissance des ensembles dénombrables, ou bien la puissance du continu.

L'intérêt du problème tient précisément à ce que si l'on se plaçait sur le terrain des raisonnements idéalistes, c'est-à-dire si l'on admettait l'existence de *tous* les nombres transfinis de seconde classe, on pourrait démontrer d'une manière irréprochable que tout complémentaire non dénombrable qui ne contient aucun ensemble parfait est nécessairement la réunion exacte d'une infinité non dénombrable d'ensembles dénombrables n'ayant deux à deux aucun point commun et numérotés d'une manière précise et sans ambiguïté possible au moyen de *tous* les nombres transfinis de seconde classe. Donc, si ce cas, logiquement possible, est pratiquement réel ([1]), on pourra affirmer que l'existence de *tous* les nombres transfinis de seconde classe est un fait d'ordre expérimental. Ce point de vue est le seul qui me paraît mériter le nom de *réaliste*.

La résolvante E de ce problème est un ensemble *projectif de classe* 3 *au plus* ; si l'on sait nommer un point de E, on a un tel complémentaire extraordinaire, et *vice versa*. Mais c'est une partie (encore projective) E_1 de E servant de résolvante à un autre problème qui paraît présenter beaucoup plus d'intérêt : dès qu'on sait nommer un point de E_1, on a une infinité non dénombrable de points pris individuellement chacun dans le continu et numérotés sans ambiguïté au moyen de *tous* les nombres transfinis de seconde classe (Henri Lebesgue).

3. La méthode est générale. Beaucoup de problèmes admettent la mise en résolvante. Tels sont, par exemple, les problèmes de la mesure et de la catégorie des ensembles projectifs de classe 2 ; tel est même le problème du continu bien ordonné ; les résolvantes de ces problèmes sont toutes des ensembles projectifs. La personne qui saurait nommer un point de la résolvante E du dernier problème aurait *tous* les points du segment (0, 1) numérotés sans ambiguïté au moyen de *tous* les nombres transfinis de seconde classe. C'est une *des* solutions du problème du continu ([2]).

4. La question est maintenant de savoir si l'on doit considérer ces ensembles projectifs comme *donnés* (bien définis). Nous ne croyons pas.

([1]) C'est en partant de la divisibilité d'entiers positifs qu'on obtient un exemple arithmétique d'ensemble analytique non mesurable B.

([2]) On a une autre solution en se plaçant sur le terrain du non-contradictoire (Hilbert). Il serait fort intéressant de savoir si la proposition : « la puissance du continu est aleph-deux » est encore non contradictoire en soi, de même que l'est la proposition : « la puissance du continu est aleph-un ».

« L'effectivité » des ensembles projectifs, bien qu'ils soient nommés, n'est qu'apparente, puisque l'opération, qui consiste à prendre le complémentaire, est une opération *purement négative*.

M. René Baire a écrit, il y a vingt ans, dans sa lettre à M. J. Hadamard : « de ce qu'un ensemble est donné, *il est faux pour moi de considérer les parties de cet ensemble comme données* ». Il nous semble que cette affirmation doit être étendue de la manière suivante : *un ensemble étant donné, il est faux de considérer son complémentaire comme donné*.

Dans l'état actuel de la Science, les ensembles mesurables B sont les seuls dont la construction au moyen des opérations positives se réalise en même temps que celle de leurs complémentaires (¹).

ÉLECTRICITÉ. — *Recherches sur le tube de Crookes*. Note de M. A. **Dauvillier**, transmise par M. M. de Broglie.

Appareil. — Le tube à vide, en verre alcalin, est de forme cylindrique (longueur 40^{cm}, diamètre 7^{cm}). Il est muni de deux électrodes cylindriques, symétriques et à fond plat, en ferro-chrome Philips (²), directement soudées au verre (diamètre 3^{cm}, distance 20^{cm}). Il est disposé verticalement, l'électrode inférieure étant refroidie par une circulation d'eau isolée et portée à un potentiel *continu*, élevé, positif ou négatif, mesuré par un voltmètre Abraham-Villard. L'électrode supérieure, mise au sol, contient une masse constante d'eau, protégée de l'évaporation par une couche d'huile. Elle contient un thermomètre et une résistance d'étalonnage en nichrôme.

Le tube est relié à une jauge à lecture directe et à une pompe de Gaëde par l'intermédiaire d'un condenseur à neige carbonique. Un osmo-régulateur permet l'entretien d'une pression constante d'hydrogène.

Expériences. — L'appareil ayant été préalablement desséché, étuvé et évacué, est rempli d'hydrogène sous diverses pressions et les courbes d'échauffement sont relevées en fonction du temps pour les deux polarités.

(¹) Rappelons que tout ensemble de points dans la définition duquel interviennent effectivement *tous* les nombres transfinis de seconde classe est un ensemble projectif. La définition transfinie, positive en apparence, se transforme donc, sur le terrain des définitions finies, en une définition purement négative.

(²) Ces électrodes sont très robustes et ont l'avantage d'être inoxydables et de ne pas absorber de vapeur de mercure.

Ces courbes présentent un début rectiligne à partir de l'ambiance et la mesure de leur pente permet, grâce à une courbe d'étalonnage, de connaître en watts la puissance dépensée dans l'électrode.

Résultats. — Trois séries de mesures ont été effectuées : deux aux pressions extrêmes, compatibles avec un fonctionnement stable, et la troisième sous une pression moyenne. Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

	Expérience I (¹).	Expérience II (²).	Expérience III (³).
Puissance W (watts)	24	24	24
Intensité I (milliamp.)	8,0	3,2	1,7
Tension V (kilovolts)	3,0	7,5	14,0
Pression (baryes)	45	26	15
Espace obscur (longueur cm).	4,5	8,5	22,0
Cathode W_c (watts)	6,7	6,5	4,9
Anode W_A (watts)	1,5	5,2	8,3
$W_c + W_A$	8,2	11,7	13,2
$\frac{W - W_c}{W_c}$	2,5	2,7	3,9

On remarque tout d'abord que la somme des puissances dépensées aux électrodes augmente lorsque la pression diminue, mais qu'elle ne dépasse guère la moitié de la puissance totale consommée. Les luminescences visibles et ultraviolettes de l'afflux, de la lumière négative et des parois, de même que la radiation Röntgen du gaz, de l'anode et des parois, sont relativement négligeables ([4]). Ce sont les rayons cathodiques diffusés par l'anode et l'émission cathodique générale (d'origine photo-électrique) qui sont surtout responsables de la différence.

([1]) L'afflux recouvre la plus grande partie de la cathode. Lumière négative très vive s'étendant presque jusqu'à l'anode. Pas de lumière positive. Aucune fluorescence verte des parois. L'énergie des rayons cathodiques est dépensée en chaleur dans les parois avoisinant la cathode. Caractéristique volts-ampères positive : le courant est proportionnel au cube de la tension. Tendance au régime à colonne positive avec discontinuité.

([2]) Afflux exclusivement frontal : diamètre d'impact $1^{cm},5$. Le faisceau cathodique divergent excite la fluorescence du verre en arrière de l'anode, mais celle-ci ne le diffuse pas notablement.

([3]) Afflux très concentré : diamètre d'impact $0^{cm},5$. Faible lumière négative en arrière de l'anode. Vive fluorescence générale et forte réflexion anodique. Tendance au désamorçage.

([4]) L'échauffement du gaz et l'émission des rayons cathodiques *positifs* peuvent aussi être négligés.

Admettons que la différence de potentiel V puisse être considérée comme reportée entre la cathode et le bord cathodique de la lumière négative et que la source des protons constituant l'afflux soit la lumière négative. Il en résulte que l'afflux et l'émission cathodique subissent tous deux la chute de potentiel V et que les puissances W_c et $W-W_c$ représentent leurs intensités relatives. On en déduit que, sur le ferro-chrome, un proton de 3 KV libère 2,5 électrons lents en moyenne et qu'un de 14 KV en libère quatre.

En d'autres termes, s'il passe sous cette tension, cinq milliampères dans le tube, le courant de protons a une intensité d'un milliampère et le courant d'électrons transporte quatre milliampères.

Disparition du gaz. — L'hydrogène a été rapidement absorbé sous tous les régimes. Certaines remarques semblent montrer que cette disparition n'est pas entièrement due à la pulvérisation cathodique, mais qu'il se produit une polymérisation temporaire du gaz.

Origine de l'afflux. — La partie *utile* de l'afflux cathodique, au point de vue de l'émission d'électrons, semble être toujours constituée de protons, quelle que soit la nature du gaz contenu dans le tube, et la source initiale en est (au moins partiellement) l'anode. Les éléments électropositifs renferment ou absorbent toujours assez d'hydrogène pour libérer des ions H^+ sous l'influence du bombardement électronique dû à la chute anodique. Les expériences classiques de Gehrcke et Reichenheim, ainsi que certains faits connus depuis longtemps des constructeurs de tubes de Crookes, semblent bien montrer ce rôle capital de l'état de l'anode [1] dans le fonctionnement du tube.

PHYSIQUE. — *Diffusion de la lumière et rapport des retards absolus dans le phénomène de Kerr.* Note [2] de M. Y. Rocard, transmise par M. A. Cotton.

La dépolarisation ρ de la lumière diffusée par un fluide et le rapport ψ des retards absolus dans ce même fluide sont liés par une relation assez curieuse, dont la forme dépend d'ailleurs de l'idée que l'on se fait du

---

[1] Il est à remarquer que ces anodes fonctionnent le plus souvent dans l'espace obscur (de Crookes).

[2] Séance du 3 août 1925.

mécanisme de la diffusion d'une part et du mécanisme de l'électrostriction d'autre part. Pour l'électrostriction, nour appliquons toujours la théorie de MM. Bruhat et Pauthenier, en la généralisant comme il est indiqué plus bas.

1. *On ne suppose rien sur les variations de l'indice n et de la densité* D. — Il est alors impossible d'édifier une théorie moléculaire de la diffusion de la lumière dans les fluides. Nous pouvons par contre généraliser les théories d'Einstein et de Gans. La formule de Gans pour la dépolarisation devient

$$(1) \qquad \rho = \frac{48\pi n\lambda\Gamma}{56\pi n\lambda\Gamma + \dfrac{3\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)\left(\dfrac{\partial n^2}{\partial\rho}\right)}{\beta_T}},$$

$\varepsilon =$ constante diélectrique, $\beta_T =$ compressibilité isothermique, $\Gamma =$ constante de Kerr pour la longueur d'onde λ. Comparant à la théorie de l'électrostriction, nous obtenons :

a. Pour l'électrostriction isothermique

$$(2) \qquad \rho = \frac{2(\psi - 1)}{3\psi - 1}.$$

b. Pour l'électrostriction adiabatique, supposons d'abord pour simplifier que n ne dépende que de D : soit γ le rapport des chaleurs spécifiques, nous obtenons

$$(3) \qquad \rho = \frac{6(\psi - 1)}{(7 + 2\gamma)\psi + (4\gamma - 7)}.$$

Si nous voulons traiter au contraire le cas général (n dépendant de D et T), nous établirons la formule suivante par voie thermodynamique : Soit une grandeur A dépendant de l'état d'un corps. Ce corps subit une variation de volume $(\Delta v)_S$ adiabatique, ou $(\Delta v)_T$ isothermique; il s'ensuit des variations $(\Delta A)_S$ ou $(\Delta A)_T$ et l'on a

$$(4) \qquad \frac{(\Delta A)_S}{(\Delta A)_T} = \frac{(\Delta v)_S}{(\Delta v)_T}\left\{1 + (\gamma - 1)\left[1 + \frac{\beta_T}{\alpha}\,\frac{\left(\dfrac{\partial A}{\partial T}\right)_P}{\left(\dfrac{\partial A}{\partial P}\right)_T}\right]\right\}, \qquad \text{où } \alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p.$$

Cette formule importante nous permet de généraliser la théorie de l'électrostriction adiabatique : il suffit de l'appliquer d'abord à ε, puis à η^2.

Posons alors

$$(5)\qquad \gamma_1 = \frac{\gamma}{\left\{1+(\gamma-1)\left[1+\frac{\beta_T}{\alpha}\frac{\left(\frac{\partial n^2}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial n^2}{\partial P}\right)_T}\right]\right\}\left\{1+(\gamma-1)\left[1+\frac{\beta_T}{\alpha}\frac{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P}\right)_T}\right]\right\}}.$$

Nous avons

$$(6)\qquad \rho = \frac{6(\psi-1)}{(7+2\gamma_1)\psi+(4\gamma_1-7)}.$$

2. *L'indice et la densité sont liés par la formule de Lorentz.* — Nous pouvons alors employer des théories moléculaires : J'ai signalé dans une Note précédente qu'il y en avait plusieurs différant par leurs conceptions sur le caractère des fluctuations. J'ai montré que les théories du genre de Vessot-King et de Gans conduisaient aux mêmes résultats en ce qui concerne la dépolarisation ; on retombe alors sur les formules données plus haut. Reste la théorie du genre de Ramanathan : elle fournit la formule

$$\rho = \frac{6(\psi-1)}{(7+2\gamma_2)\psi+(4\gamma_2-7)},$$

en posant $\gamma_2 = \frac{(n^2+2)^2}{9}$ dans le cas de l'électrostriction isothermique et $\gamma_2 = \frac{\gamma(n^2+2)^2}{9}$ dans le cas de l'électrostriction adiabatique.

En résumé, nous voyons que les mesures de ρ et ψ se contrôlent mutuellement au moyen des formules indiquées.

CHIMIE ORGANIQUE ET BIOLOGIQUE. — *Identification de l'acide glyoxylique par l'action de l'hydrazine et du xanthydrol à l'état d'acide dixanthyl-hydrazone-glyoxylique.* Note de MM. **R. Fosse** et **A. Hieulle**, présentée par M. Émile Roux.

1. La réaction colorée de Schryver, qui était considérée comme spécifique du formol, appartient aussi, non seulement à l'acide glyoxylique, ainsi que nous l'avons établi ([1]), mais encore à plusieurs autres corps.

Pour reconnaître, sans erreur possible, l'acide glyoxylique ou la formaldéhyde, il faut donc nécessairement préparer un de leurs dérivés à l'état pur. L'identification de l'acide glyoxylique, à l'aide de ses combinaisons avec les réactifs azotés des aldéhydes, manquant de sensibilité pour des recherches biologiques, nous avons cherché et réussi à précipiter sous la forme d'une nouvelle combinaison définie, cristallisée, caractéristique, de très petites quantités de cet acide-aldéhyde (1^{mg} à $\frac{1}{10}$ de milligramme) pris à de fortes dilutions (1^{cg} par litre, $\frac{1}{100000}$).

2. C'est à l'action du xanthydrol sur un mélange d'hydrazine et d'acide glyoxylique que nous devons ces résultats.

On a vainement tenté jusqu'ici de condenser l'acide glyoxylique avec la base de Curtius, dans le but d'obtenir la réaction représentée par

$$\text{(A)} \ldots \quad \text{COOH.CH(OH)}^2 + \text{NH}^2.\text{NH}^2 = 2\text{H}^2\text{O} + \text{COOH.CH}=\text{N.NH}^2.$$

L'hydrazone inconnue, qui dérive de cette égalité, existe dans la solution aqueuse d'hydrazine et d'acide glyoxylique, puisque le xanthydrol acétique en précipite son dérivé dixanthylé, résultant des deux réactions (A) et (B) :

$$\text{(B)} \quad \text{COOH.CH}=\text{N.NH}^2 + 2\,\text{HO.CH}\left\langle\begin{matrix}\text{C}^6\text{H}^4\\ \text{C}^6\text{H}^4\end{matrix}\right\rangle\text{O}$$
$$= \text{COOH.CH}=\text{N.N}\left[\text{CH}\left\langle\begin{matrix}\text{C}^6\text{H}^4\\ \text{C}^6\text{H}^4\end{matrix}\right\rangle\text{O}\right]^2 + 2\text{H}^2\text{O}.$$

3. Le xanthydrol possède la propriété de s'unir équimoléculairement,

---

([1]) R. Fosse et A. Hieulle, *Comptes rendus*, 179, 1924, p. 637.

avec perte d'eau, à l'hydroxylamine, à la semi-carbazine (¹) et à la phényl-hydrazine.

Dans le cours du présent travail nous avons eu l'occasion de constater que cet alcool réagit sur l'hydrazine elle-même, qui est transformée en dérivé trixanthylé :

$$NH^2.NH^2 + 3HO.CH\left\langle\begin{matrix}C^6H^4\\C^6H^4\end{matrix}\right\rangle O$$

$$= 3H^2O + O\left\langle\begin{matrix}C^6H^4\\C^6H^4\end{matrix}\right\rangle CH - NH.N = \left[CH\left\langle\begin{matrix}C^6H^4\\C^6H^4\end{matrix}\right\rangle O\right]^2.$$

La trixanthylhydrazine apparaît en proportion plus ou moins importante, selon les conditions expérimentales, dans l'action du xanthydrol sur le mélange d'hydrazine et d'acide glyoxylique.

Ce nouveau composé de l'hydrazine se sépare de l'acide dixanthyl-hydrazone-glyoxylique par l'action des alcalis alcooliques, qui, ne dissolvant que ce dernier, le déposent cristallisé après addition d'acide acétique.

4. *Trixanthyl-hydrazine* : $[O(C^6H^4)^2CH] - NH.N = [CH(C^6H^4)^2O]^2$. A la solution : xanthydrol, 2^g; hydrate d'hydrazine à 50 pour 100, $0^{cm^3},5$; alcool absolu, 40^{cm^3}; eau, 20^{cm^3}, on ajoute de l'acide acétique, 6^{cm^3}. La liqueur se prend bientôt en bouillie de cristaux blancs, qu'on essore, on lave à l'alcool, on dissout dans $CHCl^3$ chauffé légèrement et l'on précipite par l'alcool absolu. La matière, séchée au-dessous de 100°, retient une molécule d'eau, qu'elle perd par chauffage prolongé à 100°-105°. En tube étroit, elle fond de 159° à 162° en dégageant des bulles; puis le liquide se transforme en solide, fondant de 167° à 175°.

	C pour 100.	H pour 100.	N pour 100.
Substance hydratée : trouvé.....	99,57	5,30	4,81
Théorie pour $C^{39}H^{30}O^4N^2$....	79,32	5,08	4,74
Substance anhydre : trouvé.....	81,85	5,33	5,03
Théorie pour $C^{39}H^{28}O^3N^2$....	81,81	4,89	4,89

Eau de cristallisation : trouvé pour 100, 3,05; théorie, 3,05.

5. *Préparation et analyses de l'acide dixanthyl-hydrazone-glyoxylique :*

$$[O(C^6H^4)^2CH]^2 = N.N = CH.COOH.$$

(¹) R. Fosse, *Comptes rendus*, 143, 1906, p. 749.

On introduit peu à peu, en agitant : xanthydrol 1^g, acide acétique 200^{cm^3}, dans acide glyoxylique $0^g,2$, eau 200^{cm^3}, hydrate d'hydrazine à 50 pour 100, 5 gouttes. Après addition d'eau jusqu'à ce qu'il ne se produise plus de précipité, on agite, on essore les flocons blancs volumineux, on les lave et les exprime entre des feuilles de papier à filtre. La matière, délayée dans un vase à centrifuger avec de l'alcool à 96°, reçoit de la soude en solution alcoolique $\frac{N}{1}$ jusqu'à faible réaction alcaline persistante. L'addition d'acide acétique à la liqueur centrifugée provoque la formation d'un abondant précipité cristallisé.

Le corps dissous dans $CHCl^3$, légèrement chauffé, précipité par de l'éther de pétrole, séché au-dessous de 100°, retient une molécule d'eau de cristallisation, qui disparaît par long chauffage dans le vide ou à 105°.

	C pour 100.		H pour 100.	N pour 100.	
Acide hydraté : trouvé........	71,80	71,90	4,67	6,06	»
Théorie pour $C^{28}H^{22}O^5N^2$..	72,0	»	4,72	6,00	»
Acide anhydre : trouvé.......	75,17	»	5,14	6,18	6,18
Théorie pour $C^{28}H^{20}O^4N^2$..	75,00	»	4,49	6,22	»

6. *Dixanthyl-hydrazone-glyoxylate d'argent :*

$$[O(C^6H^4)^2CH]^2 = N.N = CH.COOAg$$

	C p. 100.	H p. 100.	N pour 100.		Ag pour 100.		
Trouvé........................	59,75	3,92	5,09	4,99	19,46	19,20	19,20
Théorème pour $C^{28}H^{19}O^4N^2Ag$.	60,54	3,42	5,04	»	19,44	»	»

MÉTÉOROLOGIE. — *L'asymétrie de la circulation atmosphérique.* Note de M. **William Herbert Hobbs.**

Dans toutes les théories de la circulation atmosphérique, le globe terrestre n'est envisagé qu'avec un plan de symétrie, équatorial. Dans les deux régions polaires, les conditions atmosphériques ont été considérées jusqu'aujourd'hui comme absolument semblables. Néanmoins la région du Nord polaire est un bassin profond occupé par l'Océan couvert de banquises, tandis que la région du Sud polaire est formée d'un continent recouvert d'une calotte de glace d'une hauteur de 3000^{m} environ. Ce bouclier de glace d'une surface d'irradiation effective a une étendue de haute pression atmosphérique, c'est-à-dire un vaste anticyclone glacial qui reste fixe. L'écoulement centrifuge de l'air superficiel sur cette calotte n'est pas régulièrement continu, mais, au contraire, il est caractérisé par des pulsations très fortes (*strophes*) qui sont constatées alternativement grâce à des calmes et des tempêtes. Ces tempêtes se déroulent graduellement, mais se terminent brusquement lorsque l'orage a atteint son maximum de violence; il entraîne une grande augmentation de température, et un abaissement d'humidité, qui rend la visibilité de l'air très grande [1].

Des conditions à peu près semblables sont réalisées au-dessus du continent, moins étendu, du Groenland qui a aussi une calotte de glace d'une hauteur de 3000^{m} environ, mais dont la position est très excentrique, son centre géographique étant déplacé du pôle Nord par 19° de latitude. On constate, sur l'Océan arcticque autour du pôle Nord, une pression atmosphérique presque normale.

La théorie de Bjerknes sur la circulation atmosphérique, c'est-à-dire la théorie du front polaire, publiée en 1920, est généralement acceptée par les météorologistes d'Europe. Comme toutes les autres théories touchant l'atmosphère, elle est basée sur l'hypothèse que les deux régions polaires sont essentiellement les mêmes. Établie pour expliquer les perturbations atmosphériques de l'Europe occidentale, cette théorie suppose l'existence

---

[1] W.-H. Hobbs, *Zeitschrift für Gletscherkunde*, 5, 1910, p. 110-120; *Proc. Am. Philos. Soc.*, 49, 1910, p. 99-104; *Characterics of Existing Glaciers*, Macmillan, New-York, 1911, Chap. IX et XVI; *Proc. Am. Philos. Soc.*, 54, 1915, p. 185-211; *Nature*, Londres, t. 105, 1920, p. 644.

d'une calotte d'air froid, cause, d'après Bjerknes, des perturbations cyclonales. Cette calotte, dite d'air froid, du pôle Nord qui, d'après ce que j'ai indiqué plus haut, n'existe pas, constituerait d'après le savant Norvégien, un contact avec l'air chaud d'origine tropicale sur une surface de discontinuité, le front polaire. Au nord de ce front « tous les signes indiquent de l'air d'origine polaire qui a une température basse pour la latitude; il montre une grande sécheresse et il se distingue par une grande visibilité ». Ces caractéristiques sont tout à fait différentes de celles de l'air nord polaire qui est souvent brumeux, mais, par contre, ce sont les caractéristiques de l'air qui descend de la calotte de glace du Groenland (*foehn*).

Cependant il me paraît que l'évidence la plus convaincante que cet air est d'origine groenlandaise se trouve dans les caractéristiques des familles cyclonales de l'Europe occidentale que Bjerknes a décrit dans ses brillantes monographies. Ces cyclones qui arrivent en série présentent une augmentation d'intensité dès le commencement jusqu'à la fin et ils se terminent brusquement. Cette évolution des cyclones correspond justement à l'écoulement de l'air froid de la calotte de glace; c'est en quelque sorte un déroulement d'un strophe d'anticyclone groenlandais. Les cyclones mourants qui arrivent de l'Ouest à la côte du Groenland semblent se ranimer pendant ces strophes d'anticyclone glacial groenlandais.

Les anticyclones glacials du Groenland et de l'Antarctique sont respectivement le pôle du vent N et le pôle du vent S du globe. Dans ces régions les courants d'air supérieurs plongent vers la surface, puis se dirigent en sens inverse. L'asymétrie du système due à la position excentrique et à l'étendue moins vaste du Groenland quand on le compare à l'Antarctique, explique le déplacement vers le Nord des zones de haute pression dans les latitudes inférieures. A cet égard les plus grandes différences s'observent entre les méridiens de 40° O et 140° E qui partagent en deux le continent du Groenland.

SISMOLOGIE. — *Tremblements de terre en France en* 1924. Note de MM. **E. Rothé**, **J. Lacoste** et de Mme **A. Hée**, présentée par M. Bigourdan.

Le nombre des tremblements de terre a atteint en France le chiffre de 24 pendant l'année 1924. Plusieurs de ces séismes ont été suivis de répliques qui ne sont pas comptées dans le chiffre précédent.

C'est encore la région des Pyrénées qui, comme les années précédentes, a offert les phénomènes les plus importants.

Sud-Ouest : région des Pyrénées. — Le 22 février à $15^h32^m35^s$, ressenti dans la plupart des départements du Sud-Ouest, fortement dans les Basses et Hautes-Pyrénées, ainsi qu'en Espagne, dans la haute vallée de l'Aragon. Les dégâts les plus importants (VI-VII, échelle internationale) se sont produits au nord du massif du Pic du Midi d'Ossau, à Nay, Arthez-d'Asson, Arudy dans les Basses-Pyrénées et dans les cantons d'Argelès et Aucun des Hautes-Pyrénées. Il s'est produit des répliques pendant les journées des 22, 23, 24 et 25. L'étude microséismique a permis de fixer l'épicentre $\varphi = 42°50' N$, $\lambda = 0°30' W$, profondeur probable 20 à 30^{km}, grâce aux observations très concordantes de Bagnères-de-Bigorre, Tortosa, Barcelone, Tolède, Puy-de-Dôme, Zurich, Strasbourg.

Le 27 février, à $21^h52^m54^s$. Ressenti également dans la plupart des départements du Sud-Ouest, ce séisme, plus faible que le précédent, a son épicentre dans la haute vallée de Cinqueta entre le Mont-Perdu et la Maladetta. Il se rattache aux séismes des années précédentes.

Le 17 août, à 6^h, ressenti dans la région montagneuse entre le Gave de Pau et l'Adour. Deux impulsions inscrites à Bagnères-de-Bigorre à $5^h55^m59^s$ et $5^h58^m0^s$.

Le 23 octobre, à $20^h32^m21^s$, épicentre dans la région de Bagnères, iP $20^h32^m21^s$, M 32^m25^s, F $33^m(41^s)$; inscrit également à Tortosa et à Barcelone.

Sud : Vaucluse. — Les 24 et 30 septembre, à 12^h et à 6^h, deux secousses avec quelques dommages à Caderousse, île de la Piboulette, phénomènes produits au moment des grandes inondations. La première comporte cinq répliques.

Sud-Est : Alpes-Maritimes. — De mars à septembre, 8 secousses sont signalées dans les régions de Beuil : le 12 mai à 21^h40^m, IV ; le 25 juillet à 4^h25^m, IV ; le 26 juillet à 6^h50^m, V, et 19^h25^m, IV ; le 5 septembre à 17^h, IV, et 23^h, III ; le 6 septembre à 8^h55^m, IV) ; le 27 septembre à 16^h. Une autre secousse est signalée le 16 avril à 4^h dans la région de Sospel.

Région du centre : Lozère-Cévennes. — Le 17 janvier vers 5^h45^m, un séisme non destructeur et d'intensité maximum V, a été ressenti en Lozère, dans l'Ardèche, le Gard, le Puy-de-Dôme et l'Hérault ; ce séisme paraît être en relation avec les deux grandes failles perpendiculaires qui se coupent dans la région de Villefort.

A signaler aussi une intensité d'ordre V dans le voisinage de l'Aigoual. Ce séisme paraît nettement différent de ceux des 3 octobre 1920, et 25 août 1922 qui avaient sensiblement affecté les mêmes régions et qu'on a attribués à des réajustements dans la cuvette synclinale de la vallée de l'Allier.

Aveyron. — Le 24 janvier, à 5^h45^m, une secousse a été ressentie à Laguiole (Aveyron).

Indre-et-Loire. — Le 19 janvier, vers 6^h30^m, une secousse a été ressentie dans la région de Tours.

Nord-Est : Haute-Marne. — Le 1er novembre, vers 2^h20^m, deux faibles secousses de 7 à 8 secondes, d'intensité III environ ; des grondements auraient été entendus dans la même région le 14 janvier.

Haut-Rhin et Bas-Rhin. — Les 11 et 12 décembre, vers $16^h 34^m$ et $7^h 21^m$, deux secousses ont été ressenties dans ces deux départements; elles ont atteint au plus le degré IV. L'épicentre, déterminé à l'aide des données microséismiques, se trouve dans le Jura Souabe à 48°22′ N et 9°30′ E.

Est : Haut-Rhin et Savoie. — Le 15 avril, vers $12^h 48^m$, un séisme de degré VIII se produisit dans la région de Viège (Valais); il fut ressenti dans toute la Suisse, et dans le nord de l'Italie ; en France il ne fut perçu qu'à Mulhouse (IV) et à Chambéry (IV) ; il a été inscrit dans toutes les stations françaises.

Savoie et Haute-Savoie. — Le 14 août, une secousse a été ressentie vers $3^h 15^m$, avec l'intensité V-VI, dans différentes localités situées sur les alluvions de la vallée de l'Isère, de l'Arly et d'une ancienne vallée glaciaire comprise entre l'Arly et le lac d'Annecy.

Doubs. — Le 19 novembre, vers $17^h 55^m$, un tremblement dont l'épicentre était situé en Suisse, dans la région de Valleyres-sous-Rances et de Vallorbe, s'est propagé jusqu'à la frontière française; la région affectée est d'ailleurs très restreinte, l'intensité a atteint le degré V. Ce mouvement est le précurseur d'un autre beaucoup plus violent qui se produisit dans la même région en janvier 1925.

La séance est levée à $15^h 25^m$.

A. Lx.